

**Министерство образования Иркутской области
Департамент образования города Иркутска
Муниципальное автономное общеобразовательное учреждение Лицей ИГУ города
Иркутска
МАОУ Лицей ИГУ г. Иркутска**

РАССМОТРЕНО
на заседании методического
объединения учителей математики от
29.08.2023г. протокол №1.
Руководитель МО И.Л. Коваленок

УТВЕРЖДЕНО
Приказ № 01-06-140 от
30.08.2023 г.
Директор Е.Ю. Кузьмина

ПРИНЯТО
решением педагогического совета
от 30.08.2023 г., протокол №1

ID -

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА
ОСНОВНОГО ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**

ID –

учебного предмета

«Решение олимпиадных задач по математике»

10 - 11 классы

Срок реализации программы 2 года

Уровень сложности программы **УГЛУБЛЕННЫЙ**

Количество часов по программе за весь период реализации - 68

Составитель программы: Кузьмин О.В., доктор физико-математических наук,
профессор, Заслуженный учитель РФ,
учитель математики МАОУ Лицей ИГУ г. Иркутска

**г. Иркутск
2023 год**

АННОТАЦИЯ К РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЕ **учебного курса «Решение олимпиадных задач по математике»**

Рабочая программа «Решение олимпиадных задач по математике» (10-11 класс) разработана в соответствии с требованиями ФГОС и ФОП основного общего образования и Положением «О рабочих программах учебных предметов, учебных курсов (в том числе внеурочной деятельности), учебных модулей в соответствии с требованиями ФГОС и ФОП основного общего образования» МАОУ Лицея ИГУ г.Иркутска., утвержденного приказом директора 01-06-132 от 30.08.2023 года и является частью основной образовательной программы основного общего образования.

Рабочая программа ориентирована на целевые приоритеты, сформулированные в федеральной рабочей программе воспитания и в рабочей программе воспитания МАОУ Лицей ИГУ г. Иркутска.

Обучение математике направлено на совершенствование нравственной и коммуникативной культуры обучающегося, развитие его интеллектуальных и творческих способностей, мышления, памяти и воображения, навыков самостоятельной учебной деятельности, самообразования.

Содержание математике ориентировано также на развитие функциональной грамотности как интегративного умения человека читать, понимать тексты, использовать информацию текстов разных форматов, оценивать ее, размышлять о ней, чтобы достигать своих целей, расширять свои знания и возможности, участвовать в социальной жизни.

Изучение математике направлено на достижение следующих целей:

В направлении личностного развития: развитие логического и критического мышления, культуры речи, способностей к умственному эксперименту, интереса к математическому творчеству; формирование качеств, необходимых для адаптации в современном информационном обществе, способностей к преодолению мыслительных стереотипов.

В метапредметном направлении: формирование представлений о математике как части общечеловеческой культуры, о значимости математики в развитии цивилизации и современного общества; развитие представлений о математике как форме описания и методе познания действительности, создание условий для приобретения первоначального опыта математического моделирования.

В предметном направлении: овладение математическими знаниями и умениями, необходимыми для изучения смежных дисциплин и продолжения обучения в профильных классах Лицея ИГУ; создание фундамента для математического развития одаренных детей.

Рабочая программа учебного предмета «Решение олимпиадных задач по математике» входит в предметную область «Математика и информатика»

Срок реализации программы – 2 год (10-11 класс)

Количество учебных часов, на которые рассчитана программа

	10 класс	11 класс	Всего
Количество учебных недель	34	34	68
Количество часов в неделю	1 ч/нед	1 ч/нед	
Количество часов в год	34	34	68

Для реализации программы используются учебники, допущенные к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования организациями, осуществляющими образовательную деятельность, приказом Минпросвещения от 21.09.2022 № 858:

Литература для учащихся

1. Балаян Э.Н. Готовимся к олимпиадам по математике: 5-11 кл. – Ростов н/Д: Феникс,
2. Галкин Е.И. Нестандартные задачи по математике: Задачи логич. характера: Кн. для учащихся 5-11 кл. – М.: Просвещение; Учебная литература,
3. Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В. Ленинградские математические кружки: пособие для внеклассной работы. – Киров: АСА,
4. Каннель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. Как решают нестандартные задачи. – М.: МЦНМО,
5. Школьные олимпиады СПбГУ 2019. Математика: учеб.-метод. пособие. – СПб.: Изд-во С.-Петер. ун-та,
6. Далингер В. А. Задачи в целых числах . – Омск: Амфора,

Электронные образовательные ресурсы, допущенные к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования приказом Минпросвещения от 02.08.2022 № 653:

1. <http://katalog.iot.ru> - каталог образовательных ресурсов сети Интернет;
2. <http://www.edu.ru> - Федеральный образовательный портал;
3. <http://school-collection.edu.ru> - единая коллекция цифровых образовательных ресурсов;
4. <http://window.edu.ru> - единое окно доступа к образовательным ресурсам;
5. Тестирование online: 5 - 11 классы :<http://www.kokch.kts.ru/cdo/>
6. Педагогическая мастерская, уроки в Интернет и многое другое: <http://teacher.fio.ru>
7. Новые технологии в образовании: <http://edu.secna.ru/main/>
8. Путеводитель «В мире науки» для школьников:<http://www.uic.ssu.samara.ru/~nauka/>
9. Мегаэнциклопедия Кирилла и Мефодия: <http://mega.km.ru>
10. сайты «Энциклопедий», например: <http://www.rubricon.ru/> <http://www.encyclopedia.ru/>

В программу включены содержание, планируемые результаты (личностные, метапредметные, предметные), тематическое планирование с учетом рабочей программы воспитания и возможностью использования электронных (цифровых) образовательных ресурсов, оценочные и методические материалы.

Рабочая программа рассмотрена на заседании методического объединения учителей-предметников (протокол №1 от 29.08.2023 г.), согласована с заместителем директора МАОУ Лицей ИГУ г. Иркутска, утверждена приказом директора № 01-06-140 от 30.08.2023 г.

Содержание программы курса «Решение олимпиадных задач по математике» в 10-11 классах.

10 классы

I. Инварианты и принцип Дирихле (9 часов)

Преобразования, инварианты преобразований.

Четность и нечетность. Делимость и остатки.

Принцип Дирихле. Метод раскрашивания.

II. Логические задачи (4 часа)

Понятие графа. Решение логических задач при помощи графов.

Нестандартные логические задачи. Решение нестандартных логических задач.

III. Комбинаторика расположений (11 часов)

Элементы комбинаторики расположений. Расположения и покрытия.

Расположения на шахматной доске. Решения задач, связанных с расположениями на шахматной доске.

IV. Аналитические и графические методы (8 часов)

Текстовые задачи. Решение текстовых задач.

Целая и дробная части числа. Решение уравнений с целой и дробной частями числа.

Неравенство Коши. Числовые неравенства. Доказательство числовых неравенств.

Итоговый контроль (2 часа)

Итоговая олимпиада.

Анализ итоговой олимпиады.

11 классы

I. Аналитические методы (8 часов)

Решение уравнений и неравенств в целых числах. Решение уравнений и неравенств с целой и дробной частями числа.

Неравенство Коши-Буняковского. Доказательство неравенств нестандартными методами.

Текстовые задачи. Решение текстовых задач.

II. Инварианты и полуинварианты (9 часов)

Инварианты и полуинварианты преобразований. Решение задач с помощью инварианта и полуинварианта.

Использование метода раскрашивания при поиске инвариантов и полуинвариантов.

Исследование чисел на делимость и нахождение остатков при поиске инвариантов и полуинвариантов.

Обобщенный принцип Дирихле.

III. Логические задачи (4 часов)

Логические задачи на нахождение оптимальной стратегии.

Решение логических задач на переливания и взвешивания.

IV. Комбинаторика расположений (10 часа)

Методы комбинаторики расположений. Комбинаторные задачи на расположения и покрытия.

Расположения на шахматной доске. Решения задач, связанных с расположениями на шахматной доске.

Итоговый контроль (2 часа)

Итоговая олимпиада.

Тематическое планирование

10 классы

Номер урока	Наименование разделов и тем уроков	Кол-во часов	Контроль
	Инварианты и принцип Дирихле	9	
1	Понятие инварианта. Четность и нечетность.	1	

2	Решение логических задач на инвариант.	1	
3	Делимость и остатки.	1	
4	Решение задач на делимость и остатки.	1	
5	Принцип Дирихле.	1	
6-7	Решение задач на принцип Дирихле.	2	
8	Метод раскрашивания.	1	
9	Решение задач на метод раскрашивания.	1	
	Логические задачи	4	
10	Понятие графа. Основные свойства графа.	1	
11	Решение логических задач с помощью графов.	1	
12	Нестандартные логические задачи.	1	
13	Решение нестандартных логических задач.	1	
	Комбинаторика расположений	11	
14-16	Элементы комбинаторики расположений.	3	
17	Расположения и покрытия.	1	
18-19	Задачи на расположения и покрытия.	2	
20	Расположения на шахматной доске.	1	
21-24	Задачи на расположения на шахматной доске.	4	
	Аналитические и графические методы	8	
25	Текстовые задачи.	1	
26	Решение текстовых задач.	1	
27	Целая и дробная части числа.	1	
28	Решение уравнений с целой и дробной частями.	1	
29	Неравенство Коши.	1	
30	Решение задач на неравенство Коши.	1	
31	Числовые неравенства.	1	
32	Доказательство числовых неравенств.	1	
	Итоговый контроль	2	
33-34	Итоговая олимпиада		2

11 классы

Номер урока	Наименование разделов и тем уроков	Кол-во часов	Контроль
	Аналитические методы	8	
1	Решение уравнений в целых числах.	1	
2	Решение неравенств в целых числах.	1	
3	Решение уравнений и неравенств с целой и дробной частями числа.	1	
4	Неравенство Коши-Буняковского.	1	
5	Решение задач на неравенство Коши-Буняковского.	1	
6	Нестандартные методы доказательства неравенств.	1	
7	Текстовые задачи.	1	

8	Решение текстовых задач.	1	
	Инварианты и полуинварианты	9	
9	Инварианты и полуинварианты.	1	
10	Решение задач с помощью инварианта и полуинварианта	1	
11	Использование метода раскрашивания при поиске инвариантов и полуинвариантов	1	
12	Основные методы исследования чисел на делимость и нахождение остатков при поиске инвариантов и полуинвариантов.	1	
13	Решение задач на делимость при поиске инвариантов.	1	
14	Решение задач на делимость и нахождение остатков при поиске полуинвариантов.	1	
15	Обобщенный принцип Дирихле.	1	
16-17	Решение задач на обобщенный принцип Дирихле.	2	
	Логические задачи	4	
18	Логические задачи на нахождение оптимальной стратегии.	1	
19	Решение задач на оптимальные стратегии.	1	
20	Задачи на переливания и взвешивания	1	
21	Решение задач на переливания и взвешивания	1	
	Комбинаторика расположений	11	
22-23	Методы комбинаторики расположений.	2	
24-25	Решение задач на расположения.	2	
26	Комбинаторные задачи на покрытия.	1	
27-28	Решение задач на покрытия.	2	
30	Расположения на шахматной доске.	1	
31-32	Задачи на расположения на шахматной доске.	3	
	Итоговый контроль	2	
33-34	Итоговая олимпиада		2

Планируемые результаты

Личностные результаты освоения программы по математике характеризуются в части:

1) патриотического воспитания:

проявлением интереса к прошлому и настоящему российской математики, ценностным отношением к достижениям российских математиков и российской математической школы, к использованию этих достижений в других науках и прикладных сферах;

2) гражданского и духовно-нравственного воспитания:

готовностью к выполнению обязанностей гражданина и реализации его прав, представлением о математических основах функционирования различных структур, явлений, процедур гражданского общества (например, выборы, опросы), готовностью к обсуждению этических проблем, связанных с практическим применением достижений

науки, осознанием важности морально-этических принципов в деятельности учёного;

3) трудового воспитания:

установкой на активное участие в решении практических задач математической направленности, осознанием важности математического образования на протяжении всей жизни для успешной профессиональной деятельности и развитием необходимых умений, осознанным выбором и построением индивидуальной траектории образования и жизненных планов с учётом личных интересов и общественных потребностей;

4) эстетического воспитания:

способностью к эмоциональному и эстетическому восприятию математических объектов, задач, решений, рассуждений, умению видеть математические закономерности в искусстве;

5) ценностей научного познания:

ориентацией в деятельности на современную систему научных представлений об основных закономерностях развития человека, природы и общества, пониманием математической науки как сферы человеческой деятельности, этапов её развития и значимости для развития цивилизации, овладением языком математики и математической культурой как средством познания мира, овладением навыками исследовательской деятельности;

6) физического воспитания, формирования культуры здоровья и эмоционального благополучия:

готовностью применять математические знания в интересах своего здоровья, ведения здорового образа жизни (здоровое питание, сбалансированный режим занятий и отдыха, регулярная физическая активность), сформированностью навыка рефлексии, признанием своего права на ошибку и такого же права другого человека;

7) экологического воспитания:

ориентацией на применение математических знаний для решения задач в области сохранности окружающей среды, планирования поступков и оценки их возможных последствий для окружающей среды, осознанием глобального характера экологических проблем и путей их решения;

8) адаптации к изменяющимся условиям социальной и природной среды:

готовностью к действиям в условиях неопределённости, повышению уровня своей компетентности через практическую деятельность, в том числе умение учиться у других людей, приобретать в совместной деятельности новые знания, навыки и компетенции из опыта других;

необходимостью в формировании новых знаний, формулировать идеи, понятия, гипотезы об объектах и явлениях, в том числе ранее неизвестных, осознавать дефициты собственных знаний и компетентностей, планировать своё развитие;

способностью осознавать стрессовую ситуацию, воспринимать стрессовую ситуацию как вызов, требующий контрмер, корректировать принимаемые решения и действия, формулировать и оценивать риски и последствия, формировать опыт.

10 класс

Личностные результаты

— ориентация обучающихся на инициативность, креативность, готовность и способность к личностному самоопределению, способность ставить цели и строить жизненные планы;

- развитие компетенций сотрудничества со сверстниками, взрослыми в образовательной, учебно-исследовательской, проектной и других видах деятельности.
- готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности.

Метапредметные результаты

Регулятивные универсальные учебные действия

Ученик научится:

- ставить и формулировать собственные задачи в образовательной деятельности и жизненных ситуациях;
- оценивать ресурсы, в том числе время и другие нематериальные ресурсы, необходимые для достижения поставленной цели;
- организовывать эффективный поиск ресурсов, необходимых для достижения поставленной цели;
- сопоставлять полученный результат деятельности с поставленной заранее целью.

Познавательные универсальные учебные действия

Ученик научится:

- находить и приводить критические аргументы в отношении действий и суждений другого; спокойно и разумно относиться к критическим замечаниям в отношении собственного суждения, рассматривать их как ресурс собственного развития;
- выходить за рамки учебного предмета и осуществлять целенаправленный поиск возможностей для широкого переноса средств и способов действия;
- выстраивать индивидуальную образовательную траекторию, учитывая ограничения со стороны других участников и ресурсные ограничения;
- менять и удерживать разные позиции в познавательной деятельности.

Коммуникативные универсальные учебные действия

Ученик научится:

- осуществлять деловую коммуникацию как со сверстниками, так и со взрослыми (как внутри образовательной организации, так и за ее пределами), подбирать партнеров для деловой коммуникации исходя из соображений результативности взаимодействия, а не личных симпатий;
- развернуто, логично и точно излагать свою точку зрения с использованием адекватных (устных и письменных) языковых средств;
- выстраивать деловую и образовательную коммуникацию, избегая личностных оценочных суждений.

Предметные результаты:

Ученик научится:

- владеть комбинаторно-логическими понятиями при решении задач и проведении математических рассуждений;
- самостоятельно формулировать логические высказывания, выдвигать гипотезы о новых свойствах и признаках комбинаторных конфигураций и обосновывать или опровергать их, обобщать или конкретизировать результаты на новых классах комбинаторных объектов, проводить в несложных случаях классификацию по различным основаниям;
- исследовать чертежи и схемы, включая визуальные представления графов, извлекать, интерпретировать и преобразовывать информацию, представленную на чертежах и схемах;
- решать задачи комбинаторно-логического содержания, в том числе в ситуациях, когда алгоритм решения не следует явно из условия, выполнять необходимые для решения

задачи дополнительные рассуждения, исследовать возможность применения теорем и формул комбинаторики и логики для решения задач;

- уметь формулировать и доказывать комбинаторно-логические утверждения;
- применять простейшие методы системного анализа при решении задач.

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

- составлять с использованием комбинаторных характеристик математические модели для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин, исследовать полученные модели и интерпретировать результат.

Учащиеся получают возможность научиться:

- свободно оперировать комбинаторно-логическими понятиями при решении задач и проведении математических рассуждений;
- выдвигать гипотезы о новых свойствах и признаках комбинаторных конфигураций и обосновывать или опровергать их, обобщать или конкретизировать результаты на новые классы конфигураций.

11 класс

Личностные результаты

- ориентация обучающихся на достижение личного счастья, реализацию позитивных жизненных перспектив, инициативность, креативность, готовность и способность к личностному самоопределению, способность ставить цели и строить жизненные планы;
- развитие компетенций сотрудничества со сверстниками, детьми младшего возраста, взрослыми в образовательной, учебно-исследовательской, проектной и других видах деятельности.
- готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности;
- осознанный выбор будущей профессии как путь и способ реализации собственных жизненных планов;

Метапредметные результаты

Регулятивные универсальные учебные действия

Выпускник научится:

- самостоятельно определять цели, задавать параметры и критерии, по которым можно определить, что цель достигнута;
- ставить и формулировать собственные задачи в образовательной деятельности и жизненных ситуациях;
- оценивать ресурсы, в том числе время и другие нематериальные ресурсы, необходимые для достижения поставленной цели;
- выбирать путь достижения цели, планировать решение поставленных задач, оптимизируя материальные и нематериальные затраты;
- организовывать эффективный поиск ресурсов, необходимых для достижения поставленной цели;
- сопоставлять полученный результат деятельности с поставленной заранее целью.

Познавательные универсальные учебные действия

Выпускник научится:

- искать и находить обобщенные способы решения задач, в том числе, осуществлять развернутый информационный поиск и ставить на его основе новые (учебные и познавательные) задачи;

- критически оценивать и интерпретировать информацию с разных позиций, распознавать и фиксировать противоречия в информационных источниках;
- использовать различные модельно-схематические средства для представления существенных связей и отношений, а также противоречий, выявленных в информационных источниках;
- находить и приводить критические аргументы в отношении действий и суждений другого; спокойно и разумно относиться к критическим замечаниям в отношении собственного суждения, рассматривать их как ресурс собственного развития;
- выходить за рамки учебного предмета и осуществлять целенаправленный поиск возможностей для широкого переноса средств и способов действия;
- выстраивать индивидуальную образовательную траекторию, учитывая ограничения со стороны других участников и ресурсные ограничения;
- менять и удерживать разные позиции в познавательной деятельности.

Коммуникативные универсальные учебные действия

Выпускник научится:

- осуществлять деловую коммуникацию как со сверстниками, так и со взрослыми (как внутри образовательной организации, так и за ее пределами), подбирать партнеров для деловой коммуникации исходя из соображений результативности взаимодействия, а не личных симпатий;
- при осуществлении групповой работы быть как руководителем, так и членом команды в разных ролях (генератор идей, критик, исполнитель, выступающий, эксперт и т.д.);
- координировать и выполнять работу в условиях реального, виртуального и комбинированного взаимодействия;
- развернуто, логично и точно излагать свою точку зрения с использованием адекватных (устных и письменных) языковых средств;
- распознавать конфликтогенные ситуации и предотвращать конфликты до их активной фазы, выстраивать деловую и образовательную коммуникацию, избегая личностных оценочных суждений.

Предметные результаты:

Выпускник научится:

- владеть комбинаторно-логическими понятиями при решении задач и проведении математических рассуждений;
- самостоятельно формулировать логические высказывания, выдвигать гипотезы о новых свойствах и признаках комбинаторных конфигураций и обосновывать или опровергать их, обобщать или конкретизировать результаты на новых классах комбинаторных объектов, проводить в несложных случаях классификацию по различным основаниям;
- исследовать чертежи и схемы, включая визуальные представления графов, извлекать, интерпретировать и преобразовывать информацию, представленную на чертежах и схемах;
- решать задачи комбинаторно-логического содержания, в том числе в ситуациях, когда алгоритм решения не следует явно из условия, выполнять необходимые для решения задачи дополнительные рассуждения, исследовать возможность применения теорем и формул комбинаторики и логики для решения задач;
- уметь формулировать и доказывать комбинаторно-логические утверждения; применять простейшие методы системного анализа при решении задач.

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

- составлять с использованием комбинаторных характеристик математические модели для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин, исследовать полученные модели и интерпретировать результат.

Выпускник получит возможность научиться:

- свободно оперировать комбинаторно-логическими понятиями при решении задач и проведении математических рассуждений;
- выдвигать гипотезы о новых свойствах и признаках комбинаторных конфигураций и обосновывать или опровергать их, обобщать или конкретизировать результаты на новые классы конфигураций.

Литература для учащихся

7. Балаян Э.Н. Готовимся к олимпиадам по математике: 5-11 кл. – Ростов н/Д: Феникс,
8. Галкин Е.И. Нестандартные задачи по математике: Задачи логич. характера: Кн. для учащихся 5-11 кл. – М.: Просвещение; Учебная литература,
9. Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В. Ленинградские математические кружки: пособие для внеклассной работы. – Киров: АСА,
10. Каннель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. Как решают нестандартные задачи. – М.: МЦНМО,
11. Школьные олимпиады СПбГУ 2019. Математика: учеб.-метод. пособие. – СПб.: Изд-во С.-Петер. ун-та,
12. Далингер В. А. Задачи в целых числах . – Омск: Амфора,

Электронные образовательные ресурсы, допущенные к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования приказом Минпросвещения от 02.08.2022 № 653:

1. <http://katalog.iot.ru> - каталог образовательных ресурсов сети Интернет;
2. <http://www.edu.ru> - Федеральный образовательный портал;
3. <http://school-collection.edu.ru> - единая коллекция цифровых образовательных ресурсов;
4. <http://window.edu.ru> - единое окно доступа к образовательным ресурсам;
5. Тестирование online: 5 - 11 классы :<http://www.kokch.kts.ru/cdo/>
11. Педагогическая мастерская, уроки в Интернет и многое другое: <http://teacher.fio.ru>
12. Новые технологии в образовании: <http://edu.secna.ru/main/>
13. Путеводитель «В мире науки» для школьников:<http://www.uic.ssu.samara.ru/~nauka/>
14. Мегаэнциклопедия Кирилла и Мефодия: <http://mega.km.ru>
15. сайты «Энциклопедий», например:<http://www.rubricon.ru/> [tp://www.encyclopedia.ru/](http://www.encyclopedia.ru/)

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Оценочные материалы

10 класс

Задания для итоговой (лицейской) олимпиады

1. Петя к числу 400 приписал справа четырехзначное число и в результате получил полный квадрат. Какое число приписал Петя? Найдите все варианты.

2. Решить уравнение $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} = 0$.

3. Числа x , y и z в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию. Докажите, что $(x + y + z)(x - y + z) = x^2 + y^2 + z^2$.

4. Через одну точку окружности проведены две хорды a и b . Их концы соединены. Площадь полученного треугольника S . Найдите радиус окружности, если угол между хордами тупой.

11 класс

Задания для итоговой (лицейской) олимпиады

1. Сумма нескольких последовательных натуральных чисел равна 2003. Найдите количество этих чисел (все возможные случаи).

2. Доказать неравенство $\sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ для всех положительных значений переменных.

3. Решите уравнение $x^2 - 2x \sin xy + 1 = 0$.

4. Около окружности радиуса r описан правильный 12-угольник $A_1A_2 \dots A_{12}$. Докажите, что $A_1A_2 + A_1A_4 = 2r$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

10 класс

1. Принцип Дирихле

При решении различных математических задач применяется специальный метод, получивший название: «принцип Дирихле». Существует несколько формулировок данного принципа. Самая популярная следующая:

«Если в n клетках сидит m зайцев, причем $m > n$, то хотя бы в одной клетке сидят по крайней мере два зайца».

Доказывается данный принцип Дирихле легко, методом доказательства от противного, который учащиеся 7 класса изучали на уроках. Поэтому некоторые из задач, решаемых с помощью принципа Дирихле, также можно решить, используя метод доказательства от противного, но не все.

На первый взгляд непонятно, почему это совершенно очевидное предложение тем не менее является мощным математическим методом решения задач, причем самых разнообразных. Все дело, оказывается, в том, что в каждой конкретной задаче нелегко понять, что же здесь выступает в роли зайцев, а что – в роли клеток. И почему надо, чтобы зайцев было больше, чем клеток. Выбор зайцев и клеток часто неочевиден. Далеко не всегда по формулировке задачи можно определить, что следует применить принцип Дирихле. Главное же достоинство данного метода решения состоит в том, что он дает неконструктивное решение (то есть мы знаем, что такие клетки есть, но где именно они находятся, часто указать не можем); попытка же дать конструктивное доказательство приводит к большим трудностям. Рассмотрим примеры различных задач, решаемых с помощью принципа Дирихле.

1. В классе 15 учеников. Докажите, что найдутся, как минимум, 2 ученика, отмечающих дни рождения одним месяце.

Решение. Пусть 15 учеников будут «зайцы». Тогда «клетками» будут месяцы года, их 12. Так как $15 > 12$, то по принципу Дирихле найдется, как минимум, одна клетка, в которой будут сидеть по крайней мере 2 «зайца». То есть найдется месяц, в котором будут отмечать дни рождения не менее 2 учеников класса. А это и требовалось доказать. Также задача легко решается с использованием метода доказательства от противного.

2. Внутри равностороннего треугольника со стороной 1 см расположены 5 точек. Докажите, что расстояние между некоторыми двумя из них меньше 0,5 см.

Решение. Это наиболее трудная задача на принцип Дирихле. Но на примере ее решения очень хорошо видны все достоинства принципа. Итак, при решении сначала надо выбрать что-то за «зайцев». Так как в условии задачи фигурирует число 5, то пусть 5 точек будут «зайцами». Так как «клеток» должно быть меньше, и чаще всего на 1, то их должно быть 4. Как получить эти 4 «клетки»? Так как в условии задачи есть еще 2 числа: 1 и 0,5; причем второе меньше первого в 2 раза, то можно получить 4 «клетки», разбив равносторонний треугольник с помощью проведения отрезков, соединяющих середины сторон (рис. 35). Тогда получим 4 равносторонних треугольника со сторонами по 0,5 см, которые и будут у нас «клетками».

Так как «зайцев» 5, «клеток» 4 и $5 > 4$, то по принципу Дирихле найдется «клетка» – равносторонний треугольник со стороной 0,5 см, в который попадут не менее двух «зайцев» точек. А так как все 4 треугольника равны и расстояние между точками в любом треугольнике будет меньше, чем 0,5 см, то мы доказали, что между некоторыми двумя точками из пяти расстояние будет меньше, чем 0,5 см.

Можно показать учащимся и другие возможные разбиения треугольника на «клетки».

3. Дано 12 целых чисел. Докажите, что из них можно выбрать 2, разность которых делится на 11.

Решение. Примем числа за «зайцев». Так как их 12, то «клеток» должно быть меньше. Пусть «клетки» – это остатки от деления целого числа на 11. Всего «клеток» будет 11: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Тогда по принципу Дирихле найдется «клетка», в которой будут сидеть не менее чем 2 «зайца», то есть найдутся 2 целых числа с одним остатком. А разность двух чисел с одинаковым остатком от деления на 11 будет делиться на 11. Действительно, пусть $a = 11m + q$, $b = 11n + q$, тогда $a - b = 11m + q - (11n + q) = 11(m - n)$. А $11(m - n)$ делится на 11.)

4. В ковре размером 3 3 м Коля проделал 8 дырок. Докажите, что из него можно

вырезать коврик размером 1 1 м, не содержащий внутри себя дырок. (Дырки можно считать точечными.)

В данной задаче для решения необходимо применить другую формулировку принципа Дирихле:

«Пусть в n клетках сидят m зайцев, причем $n > m$. Тогда найдется хотя бы одна пустая клетка».

Посмотрим, как эту формулировку принципа Дирихле можно применить при решении данной задачи.

Решение. Здесь дырки будут «зайцами». Разрежем ковер на 9 ковриков размером 1 1 м. Так как ковриков «клеток» 9, а дырок «зайцев» 8, то найдется хотя бы одна «клетка», в которой не будет «зайцев», то есть найдется коврик без дырок внутри.

Вывод. Таким образом, применяя данный метод, надо:

- 1) определить, что удобно в задаче принять за «клетки», а что – за «зайцев»;
- 2) получить «клетки»; чаще всего «клеток» меньше (больше), чем «зайцев», на одну (или более);
- 3) выбрать для решения требуемую формулировку принципа Дирихле.

Самостоятельная работа

5. Дано 9 целых чисел. Докажите, что из них можно выбрать 2, разность которых делится на 8

6. В классе 35 учеников. Можно ли утверждать, что среди них найдутся хотя бы два ученика, фамилии которых начинаются с одной буквы?

7. В лесу растет миллион елок. Известно, что на каждой из них не более 600 000 иголок. Докажите, что в лесу найдутся две елки с одинаковым количеством

8. На дискотеку в студенческое общежитие, в котором 42 комнаты, пришли 36 гостей. Докажите, что найдется комната, в которую не пришел ни один гость.

9. В классе 26 учеников, из них более половины мальчики. Докажите, что какие-то 2 мальчика сидят за одним столом, если в классе 13 столов.

Задачи-шутки

10. Как одним мешком пшеницы, смолов ее, наполнить два таких же мешка?

11. Что это: две головы, две руки, шесть ног, а идут или бегут только четыре?

12. Как-то в праздник один мой знакомый сказал мне: «Позавчера мне было 40 лет, а в будущем году исполнится 43 года». Могло ли такое быть?

Домашнее задание

13. Внутри правильного шестиугольника со стороной 1 см расположены 7 точек. Докажите, что расстояние между некоторыми двумя точками меньше, чем 1 см.

14. В вершинах квадрата записаны числа 3, 1, 2, 5. Разрешается прибавлять к любым двум числам, стоящим в квадрате, одно и то же целое число. Можно ли через несколько ходов получить во всех вершинах одинаковые числа?

15. Имеются два ведра – одно вместимостью 4 л, другое – 9 л. Можно ли набрать из реки ровно 6 л воды?

2. Задачи по теме «Переливания»

1. Используя два ведра вместимостью 5 и 3 л, наберите из бочки 4 л воды.

2. Используя два ведра вместимостью 5 и 4 л, наберите из водопроводного крана 3 л воды.

3. Имеются двое песочных часов: на 7 минут и на 11 минут. Каша должна вариться

15 минут. Как сварить ее, перевернув часы минимальное количество раз?

4. Используя девятилитровое ведро и четырехлитровый бидон, наберите из пруда 7 л воды.

5. Используя 2 ведра вместимостью 9 и 11 л, наберите из пруда 4 л воды.

6. Из полного восьмилитрового ведра отлейте 4 л с помощью пустых трехлитровой банки и пятилитрового бидона. Воду выплескивать на землю нельзя, другими сосудами, кроме этих трех, пользоваться нельзя.

7. Имеются двухлитровая и пятилитровая банки. Как сделать так, чтобы, в одной из них оказался ровно один литр воды?

8. Для марш-броска солдату необходимо иметь 4 литра воды. Больше он взять не может. На базе, где имеется источник воды, есть только 5-литровые фляги и 3-литровые банки. Как с помощью одной фляги и одной банки набрать 4 литра во флягу?

9. Как, имея 5-литровое ведро и 9-литровую банку, набрать из реки ровно три литра воды?

10. Из полного восьмилитрового ведра отлейте 4 л с помощью пустых 3-литровой банки и 5-литрового бидона. (Пользоваться другими емкостями и выливать воду на землю нельзя).

11. Отлейте из цистерны 13 л молока, пользуясь бидонами емкостью 17 л и 5 л.

12. Тому Сойеру нужно покрасить забор. Он имеет 12 л краски и хочет отлить из этого количества половину, но у него нет сосуда вместимостью в 6 л. У него 2 сосуда: один – вместимостью в 8 л, а другой – вместимостью в 5 л. Каким образом налить 6 л краски в сосуд на 8 л? Какое наименьшее число переливаний необходимо при этом сделать?

13. Имеются два полных десятилитровых бидона молока и пустые кастрюли емкостью четыре литра и пять литров. Отлейте по 2 л молока в каждую кастрюлю.

11 класс

1. Основные методы решения уравнений в целых числах

Существует множество математических задач, ответами к которым служат одно или несколько целых чисел. В качестве примера можно привести четыре классические задачи, решаемые в целых числах – задача о взвешивании, задача о разбиении числа, задача о размене и задача о четырёх квадратах. Стоит отметить, что, несмотря на достаточно простую формулировку этих задач, решаются они весьма сложно, с применением аппарата математического анализа и комбинаторики. Идеи решения первых двух задач принадлежат швейцарскому математику Леонарду Эйлеру (1707–1783). Однако наиболее часто можно встретить задачи, в которых предлагается решить уравнение в целых (или в натуральных) числах. Некоторые из таких уравнений довольно легко решаются методом подбора, но при этом возникает серьезная проблема – необходимо доказать, что все решения данного уравнения исчерпываются подобранными (то есть решений, отличных от подобранных, не существует). Для этого могут потребоваться самые разнообразные приёмы, как стандартные, так и искусственные. Подобные задания достаточно часто встречаются в олимпиадах по математике разных лет и различных уровней, а также в задании 19 ЕГЭ по математике (профильный уровень). В то же время в школьном курсе математики данная тема практически не рассматривается, поэтому школьники, участвуя в математических олимпиадах или сдавая профильный ЕГЭ по математике, обычно сталкиваются со значительными трудностями при выполнении подобного рода заданий.

Задача 1. Решить в натуральных числах уравнение $n! + 5n + 13 = k^2$.

Решение. Заметим, что $n!$ оканчивается нулём при $n > 4$. Далее, при любых $n \in \mathbb{N}$, число $5n$ оканчивается либо цифрой 0, либо цифрой 5. Следовательно, при $n > 4$ левая часть уравнения оканчивается либо цифрой 3, либо цифрой 8. Но она же равна точному квадрату, который не может оканчиваться этими цифрами. Поэтому нужно перебрать только четыре варианта: $n = 1, n = 2, n = 3, n = 4$.

$$1) n = 1 \Rightarrow k^2 = 19 \Rightarrow k \notin \mathbb{N}.$$

$$2) n = 2 \Rightarrow k^2 = 25 \Rightarrow k = 5.$$

$$3) n = 3 \Rightarrow k^2 = 34 \Rightarrow k \notin \mathbb{N}.$$

$$4) n = 4 \Rightarrow k^2 = 57 \Rightarrow k \notin \mathbb{N}.$$

Значит, уравнение имеет единственное натуральное решение $n = 2, k = 5$.

В этой задаче использовались свойства точных квадратов, свойства факториалов, и остатки от деления обеих частей уравнения на 10.

Задача 2. Решить в целых числах уравнение $n^2 - 4y! = 3$.

Решение. Сначала перепишем исходное уравнение в виде $n^2 = 4y! + 3$. Если посмотреть на это соотношение с точки зрения теоремы о делении с остатком, то можно заметить, что точный квадрат, стоящий в левой части уравнения, даёт при делении на 4 остаток 3, что невозможно. Действительно, любое целое число представимо в одном из следующих четырёх видов:

$$x = 4a, \quad x = 4a + 1, \quad x = 4a + 2, \quad x = 4a + 3.$$

Для каждого из этих случаев имеем:

$$x^2 = 16a^2 = 4(4a^2);$$

$$x^2 = 16a^2 + 8a + 1 = 4(4a^2 + 2a) + 1;$$

$$x^2 = 16a^2 + 16a + 4 = 4(4a^2 + 4a + 1);$$

$$x^2 = 16a^2 + 24a + 9 = 4(4a^2 + 6a + 2) + 1.$$

Таким образом, точный квадрат при делении на 4 даёт в остатке либо 0, либо 1. Следовательно, исходное уравнение не имеет решений.

Задача 3. Решить в целых числах уравнение $8z^2 = (t!)^2 + 2$.

Решение. Непосредственная проверка показывает, что $t = 0$ и $t = 1$ не являются решениями уравнения. Если $t > 1$, то $t!$ является чётным числом, то есть, оно представимо в виде $t! = 2s$. В таком случае уравнение можно преобразовать к виду $4z^2 = 2s^2 + 1$. Однако, полученное уравнение заведомо не имеет решений, ибо в левой части стоит чётное число, а в правой – нечётное.

Задача 4. Решить в целых числах уравнение $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$.

Решение. Исходное уравнение можно переписать следующим образом:

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 5.$$

Из условия следует, что $(x - 1)$, $(y + 3)$ – целые числа. Следовательно, данное уравнение эквивалентно следующей совокупности:

$$\begin{cases} (x-1)^2 = 1, \\ (y+3)^2 = 4. \end{cases} \quad \begin{cases} (x-1)^2 = 4, \\ (y+3)^2 = 1. \end{cases}$$

Теперь можно выписать всевозможные целые решения уравнения.

$$(2; -1), (2; -5), (0; -1), (0; -5), (3; -1), (3; -4), (-1; -2), (-1; -4).$$

Задача 5. Решить в целых числах уравнение $z + t - 2z = 7$.

Решение. Исходное уравнение можно преобразовать к виду $(z + 1)(t - 2) = 5$. Числа $(z + 1)$, $(t - 2)$ являются целыми, поэтому имеют место следующие варианты:

- 1) $\begin{cases} z + 1 = 1, \\ t - 2 = 5. \end{cases}$ Отсюда имеем $z = 0, t = 7$.
- 2) $\begin{cases} z + 1 = 5, \\ t - 2 = 1. \end{cases}$ Тогда $z = 4, t = 3$.
- 3) $\begin{cases} z + 1 = -1, \\ t - 2 = -5. \end{cases}$ В таком случае $z = -2, t = -3$.
- 4) $\begin{cases} z + 1 = -5, \\ t - 2 = -1. \end{cases}$ Значит, $z = -6, t = 1$.

Итак, уравнение имеет ровно четыре целых решения.

Задача 6. Решить в целых числах уравнение $n(n + 1) = (2k + 1)!!$

Решение. Число $(2k + 1)!!$ нечётно при всех неотрицательных значениях k согласно определению (при отрицательных k оно вообще не определено). С другой стороны, оно равно числу $n(n + 1)$, которое чётно при всех целых значениях k . Противоречие.

Задача 7. Решить в целых числах уравнение $xy + x + 2y = 1$.

Решение. Путём преобразований уравнение можно свести к следующему:

$$x = -2 - \frac{3}{y + 1}$$

Данное преобразование не изменило ОДЗ неизвестных, входящих в уравнение, так как подстановка $y = -1$ в первоначальное уравнение приводит к абсурдному равенству $-2 = 1$.

Согласно условию, x – целое число. Иначе говоря, $-2 - \frac{3}{y + 1}$ тоже целое число. Но тогда

число $\frac{3}{y + 1}$ обязано быть целым. Дробь является целым числом тогда и только тогда, когда числитель делится на знаменатель. Делители числа 3: 1, 3, -1, -3. Следовательно, для неизвестной возможны четыре случая: $y = 0$, $y = 2$, $y = -2$, $y = -4$. Теперь можно вычислить соответствующие значения неизвестной x . Итак, уравнение имеет ровно четыре целых решения: $(-5; 0)$, $(-5; 2)$, $(1; -2)$, $(1; -4)$.

Задача 8. Решить в целых числах уравнение $5m = n^2 + 2$.

Решение. Если $m = 0$, то уравнение примет вид $n^2 = -1$. Оно не имеет целых решений. Если $m < 0$, то левая часть уравнения, а значит, и n , не будет являться целым числом. Значит, $m > 0$. Тогда правая часть уравнения (как и левая) будет кратна 5. Но в таком случае n^2 при делении на 5 должно давать остаток 3, что невозможно (это

доказывается методом перебора остатков, который был изложен при решении задачи 1). Следовательно, данное уравнение не имеет решений в целых числах.

Задача 9. Решить в целых числах уравнение $(x!)^4 + (y - 1)^4 = (z + 1)^4$.

Решение. Заметим, что в силу чётности показателей степеней уравнение эквивалентно следующему: $(x!)^4 + |y - 1|^4 = |z + 1|^4$. Тогда $x!$, $|y - 1|$, $|z + 1|$ – натуральные числа. Однако, согласно Великой теореме Ферма, эти натуральные числа не могут удовлетворять исходному уравнению. Таким образом, уравнение неразрешимо в целых числах.

2. Взвешивания

Задачи на взвешивание – тип олимпиадных задач по математике, в которых требуется у локализовать отличающийся от остальных предмет по весу за ограниченное число взвешиваний. Чаще всего в качестве взвешиваемых объектов используются монеты. Реже имеется также набор гирек известной массы.

Поиск решения в этом случае осуществляется путем операций сравнения, правда, не только одиночных элементов, но и групп элементов между собой. Задачи данного типа чаще всего решаются методом рассуждений.

При решении этих задач часто используется следующее соображение: весы могут пребывать в одном из трёх состояний

- перевесила левая чашка;
- перевесила правая чашка;
- чашки находятся в равновесии.

Рассмотрим, как эти рассуждения применяются при решении задач.

Задача 1. Имеются неправильные чашечные весы, мешок крупы и правильная гиря массой в 1 кг. Как отвесить на этих весах 1 кг крупы?

Решение. Поставим на одну чашку весов гирю весом 1 кг и уравновесим весы крупой из мешка. Чашки весов находятся в равновесии – с обеих сторон по 1 кг. Теперь снимем с весов эту гирю и вместо нее насыпем крупу. Когда этой крупы станет ровно 1 кг, весы снова окажутся в равновесии.

Задача 2. У Антошки есть 27 золотых монет. Но известно, что Филя заменил одну монету на фальшивую, а она по весу тяжелее настоящих. Как за три взвешивания на чашечных весах без гирь Антошке определить фальшивую монету?

Решение. Разделим монеты на 3 кучки по 9 монет ($27 : 3 = 9$). Положим на чаши весов первую и вторую кучки; по результату этого взвешивания мы точно узнаем, в какой из кучек находится фальшивка (достаточно, чтобы весы показали равенство, чтобы сделать вывод, что фальшивка – в третьей кучке). Теперь, аналогично, разделим выбранную кучку с фальшивкой на три части по три монеты ($9 : 3 = 3$), положим на весы две из этих частей и определим, в какой из частей находится фальшивая монета. Наконец, остается из трех монет определить более тяжелую: кладем на чаши весов по 1 монете – фальшивкой является более тяжелая; если же на весах равенство, то фальшивой является третья монета из части. Задача решена.

Задача 3. Имеются чашечные весы без гирь и 4 одинаковые по внешнему облику

монеты. Одна из монет фальшивка, кроме того масса монеты по отношению к другим монетам неизвестна. Но все настоящие монеты одного веса. Сколько надо взвешиваний, чтобы определить фальшивую монету?

Решение. Если у нас 3 монеты, достаточно двух взвешиваний. Кладём на каждую чашку весов по одной монете. Если весы не в равновесии, значит, та монета, которая осталась, – настоящая. Кладём её на весы с любой из остальных и сразу определяем, какая из них фальшивка. Если же весы в равновесии, значит, фальшивая монета та, которая осталась, и вторым взвешиванием можно даже определить, легче она или тяжелее, чем настоящие. Если у нас 4 монеты, опять достаточно двух взвешиваний. Разделим наши монеты на две кучки по 2 монеты и положим одну из кучек на весы – по монете на каждую чашку. Если весы в равновесии, то, следовательно, обе монеты на них настоящие. Если весы не в равновесии, то обе монеты на столе настоящие. Итак, теперь мы знаем, в какой кучке лежит фальшивая монета. Положим на одну чашку весов монету из кучки, где обе настоящие, на вторую – монету из кучки, где фальшивая. Если при этом весы будут в равновесии, значит, фальшивая монета осталась на столе, а если не в равновесии, значит, мы положили её на весы (в этом случае мы даже узнаем, легче она или тяжелее).

Задача 4. В корзине лежат 13 яблок. Имеются весы, с помощью которых можно узнать суммарный вес любых двух яблок. Придумайте способ выяснить за 8 взвешиваний суммарный вес всех яблок.

Решение. Занумеруем яблоки. Взвесим первое яблоко со вторым, второе с третьим и третье с первым, затем сложим полученные веса и получим удвоенный вес трех яблок, а затем и вес трех яблок, следовательно, за три взвешивания мы узнали суммарный вес первых трех яблок. Осталось пять взвешиваний и десять яблок, которые взвешиваем попарно и, суммируя все данные, получим вес 13 яблок.