Министерство образования Иркутской области
Департамент образования города Иркутска
Муниципальное автономное общеобразовательное учреждение
Лицей ИГУ города Иркутска
МАОУ Лицей ИГУ г. Иркутска

РАССМОТРЕНО
на заседании методического
объединения учителей математики
от 29.08.2023г. протокол №1.
Руководитель МО И.Л. Коваленок

УТВЕРЖДЕНО
Приказ № 01-06-140 от
30.08.2023 г.
Директор Е.Ю. Кузьмина

ПРИНЯТО
решением педагогического совета
от 30.08.2023 г., протокол №1

ID -

МУНИЦИПАЛЬНОЕ
АВТОНОМНОЕ
ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ЛИЦЕЙ ИГУ
ГОРОДА ИРКУТСКА

Подписано цифровой подписью: МУНИЦИПАЛЬНОЕ АВТОНОМНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ЛИЦЕЙ ИГУ ГОРОДА ИРКУТСКА
DN: c=RU, st=ИРКУТСКАЯ ОБЛАСТЬ, street=УЛ. АКАДЕМИКА КУРЧАТОВА Д. 13А, l=Г. ИРКУТСК, title=Директор, o=МУНИЦИПАЛЬНОЕ АВТОНОМНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ЛИЦЕЙ ИГУ ГОРОДА ИРКУТСКА, 1.2.643.100.1=120D31303533383132303530343031, 1.2.643.100.3=120B30333934393231373538335, 1.2.643.100.4=120A33383132303833333032, 1.2.643.3.131.1.1=120C333831323533313438323439, email=ligu_irk@mail.ru, givenName=Елена Юрьевна, sn=Кузьмина, cn=МУНИЦИПАЛЬНОЕ АВТОНОМНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ЛИЦЕЙ ИГУ ГОРОДА ИРКУТСКА
Дата: 2023.09.12 20:55:53 +08'00'

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

ОСНОВНОГО ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

ID –

учебного курса

«Решение олимпиадных задач по математике для 5-6 классов»

Срок освоения – 2 года

Уровень сложности программы УГЛУБЛЕННЫЙ

Количество часов по программе за весь период реализации - 68

Составители программы: Кузьмин О.В., доктор физ.-мат. наук,
профессор, Заслуженный учитель РФ,
учитель математики МАОУ Лицей ИГУ г. Иркутска;
Кузьмина Е.Ю., канд. физ.-мат. наук,
доцент, Заслуженный работник образования Иркутской области, учитель математики МАОУ Лицей ИГУ г. Иркутска

г. Иркутск, 2023 год

АННОТАЦИЯ К РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЕ
учебного курса «Решение олимпиадных задач по математике»

Рабочая программа «Решение олимпиадных задач по математике» (5-6, класс) разработана в соответствии с требованиями ФГОС и ФОП основного общего образования и Положением «О рабочих программах учебных предметов, учебных курсов (в том числе внеурочной деятельности), учебных модулей в соответствии с требованиям ФГОС и ФОП основного общего образования» МАОУ Лицея ИГУ г.Иркутска,, утвержденного приказом директора 01-06-132 от 30.08.2023 года и является частью основной образовательной программы основного общего образования.

Рабочие программы ориентирована на целевые приоритеты, сформулированные в федеральной рабочей программе воспитания и в рабочей программе воспитания МАОУ Лицей ИГУ г. Иркутска.

Обучение математике направлено на совершенствование нравственной и коммуникативной культуры обучающегося, развитие его интеллектуальных и творческих способностей, мышления, памяти и воображения, навыков самостоятельной учебной деятельности, самообразования.

Содержание математике ориентировано также на развитие функциональной грамотности как интегративного умения человека читать, понимать тексты, использовать информацию текстов разных форматов, оценивать ее, размышлять о ней, чтобы достигать своих целей, расширять свои знания и возможности, участвовать в социальной жизни.

Изучение математике направлено на достижение следующих целей:

В направлении личностного развития: развитие логического и критического мышления, культуры речи, способностей к умственному эксперименту, интереса к математическому творчеству; формирование качеств, необходимых для адаптации в современном информационном обществе, способностей к преодолению мыслительных стереотипов.

В метапредметном направлении: формирование представлений о математике как части общечеловеческой культуры, о значимости математики в развитии цивилизации и современного общества; развитие представлений о математике как форме описания и методе познания действительности, создание условий для приобретения первоначального опыта математического моделирования.

В предметном направлении: овладение математическими знаниями и умениями, необходимыми для изучения смежных дисциплин и продолжения обучения в профильных классах Лицея ИГУ; создание фундамента для математического развития одаренных детей.

Рабочая программа учебного предмета «Решение олимпиадных задач по математике» входит в обязательную предметную область «Математика и информатика»

Срок реализации программы – 2 года (5, 6 класс)

Количество учебный часов, на которые рассчитана программы

	5 класс	6 класс	Всего
Количество учебных недель	34	34	68
Количество часов в неделю	1 ч/нед	1 ч/нед	
Количество часов в год	34	34	68

Для реализации программ используются учебники, допущенные к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования организациями, осуществляющими образовательную деятельность, приказом Минпросвещения от 21.09.2022 № 858:

1. Дорофеев Г.В., Петерсон Л.Г. Математика. 5 класс. Часть 1. М.: Издательство «Ювента»,
2. Дорофеев Г.В., Петерсон Л.Г. Математика. 5 класс. Часть 2. М.: Издательство «Ювента»,.
3. Дорофеев Г.В., Петерсон Л.Г. Математика. 6 класс. Часть 1. М.: Издательство «Ювента»,
4. Дорофеев Г.В., Петерсон Л.Г. Математика. 6 класс. Часть 2. М.: Издательство «Ювента»,.
5. Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С. Алгебра. 7 класс, Издательский центр ВЕНТАНА-ГРАФ,
6. Петерсон Л.Г. Математика в 3-х частях. – М. Изд-во «Ювента», 136 с.
7. Галицкий М.Л. Сборник задач по алгебре 8-9 / М.Л. Галицкий, А.М. Гольдман, Л.И. Звавич. – М. : Просвещение,

Электронные образовательные ресурсы, допущенные к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования приказом Минпросвещения от 02.08.2022 № 653:

1. http://katalog.iot.ru - каталог образовательных ресурсов сети Интернет;
2. http://www.edu.ru - Федеральный образовательный портал;
3. http://school-collection.edu.ru - единая коллекция цифровых образовательных ресурсов;
4. http://window.edu.ru - единое окно доступа к образовательным ресурсам;
5. Тестирование online: 5 - 11 классы :http://www.kokch.kts.ru/cdo/
6. Педагогическая мастерская, уроки в Интернет и многое другое: http://teacher.fio.ru
7. Новые технологии в образовании: http://edu.secna.ru/main/
8. Путеводитель «В мире науки» для школьников: http://www.uic.ssu.samara.ru/~nauka/
9. Мегаэнциклопедия Кирилла и Мефодия: http://mega.km.ru
10. сайты «Энциклопедий», например: http://www.rubricon.ru/ http://www.encyclopedia.ru/

В программу включены содержание, планируемые результаты (личностные, метапредметные, предметные), тематическое планирование с учетом рабочей программы воспитания и возможностью использования электронных (цифровых) образовательных ресурсов, оценочны и методические е материалы.

Рабочая программа рассмотрена на заседании методического объединения учителей-предметников (протокол №1 от 29.08.2023 г.), согласована с заместителем директора МАОУ Лицей ИГУ г. Иркутска, утверждена приказом директора № 01-06-140 от 30.08.2023 г.

Содержание программы

5 класс

1. Задачи-шутки (3 часа)

Проверка внимания. Умеем ли мы считать? Учимся делать выводы.

2. Четность (7 часов)

Свойства четности. Решение задач на чередование. Разбиение на пары. Игры-шутки.

3. Принцип Дирихле (6 часов)

Понятие о принципе Дирихле. Решение простейших задач на принцип Дирихле. Принцип Дирихле в задачах с «геометрической» направленностью.

4. Раскраски (6 часов)

Знакомство с идеей раскрашивания некоторых объектов для выявления их свойств и закономерностей. Решение задач с помощью идеи раскрашивания. Раскраски и принцип Дирихле.

5. Конструктивные задачи (6 часов)

Равновеликие и равносоставленные фигуры. Геометрические головоломки на разрезание и перекладывание. Задачи на построение примера. Задачи на переливания. Задачи на взвешивания.

6. Делимость (4 часов)

Делимость и остатки. Признаки делимости. Задачи на десятичную запись числа. Задачи на использование свойств делимости. Делимость и принцип Дирихле.

Итоговый контроль. Зачетная работа (1 час)

6 класс

1. Задачи на части и проценты (4 часа)

Задачи на проценты. Задачи на проценты и части. Задачи на составление уравнений.

2. Графы (8 часов)

Основные понятия теории графов. Степень вершины. Полный граф и его свойства.
Путь, маршрут и цикл в графе. Связные вершины. Компоненты связности графа. Дерево. Мост и число ребер в дереве.

3. Инвариант (7 часов)

Понятие об инварианте. Решение простейших задач на инвариант с помощью чётности. Инвариант и раскраски. Инвариант и остатки. Понятие о полуинварианте. Процессы и операции.

4. Конструктивные задачи (6 часов)

Примеры и конструкции. Задачи на построение примера. Построение контрпримера. «Оценка + пример». Оценки и примеры конструкций на шахматной доске.

5. Игры (7 часов)

Игры-шутки. Симметрия. Разбиение на пары, группы, фигуры. Дополнение до особой позиции. Первый ход. Передача хода. Геометрические игры.

Итоговый контроль. (2 час)

ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

5 класс

Номер урока	Наименование разделов и тем уроков	Кол-во часов	Контроль
	Раздел 1. Задачи-шутки	**3**	
1	Проверка внимания	1	
2	Умеем ли мы считать?	1	
3	Учимся делать выводы	1	
	Раздел 2. Четность	**7**	

4	Четные и нечетные числа. Признак делимости на два	1	
5	Свойства четности	1	
6	Решение задач на четность	1	
7	Разбиение на пары	1	
8	Контрольная работа за 1 четверть		1
9	Решение задач на чередование. Игры-шутки	1	
10	Контрольный урок		1
	Раздел 3. Принцип Дирихле	**6**	
11	Знакомство с принципом Дирихле	1	
12	Решение задач на принцип Дирихле	1	
13	Обобщенный принцип Дирихле	1	
14	Решение задач на обобщенный принцип Дирихле	1	
15	Контрольная работа за 2 четверть		1
16	Геометрические аналоги принципа	1	
	Раздел 4. Раскраски	**6**	
17	Знакомство с идеей раскрашивания	1	
18	Решение задач методом раскрашивания.	1	
19	«Шахматные» раскраски	1	
20	Решение задач с помощью «шахматных» раскрасок	1	
21	Раскраски и принцип Дирихле	1	
22	Контрольный урок		1
	Раздел 5. Конструктивные задачи	**6**	
23	Равновеликие и равносоставленные фигуры	1	
24	Геометрические головоломки на разрезание и перекладывание Задачи на построение примера	1	
25	Контрольная работа за 3 четверть		1
26	Задачи на переливания	1	
27	Задачи на взвешивания	1	
28	Контрольный урок		1
	Раздел 6. Делимость	**5**	
29	Делимость и остатки. Признаки делимости	1	
30	Задачи на десятичную запись числа	1	
31	Задачи на использование свойств делимости	1	
32, 33	Делимость и принцип Дирихле	2	
34	Итоговая контрольная работа		1
	Итого часов:	27	7

6 класс

Номер урока	Наименование разделов и тем уроков	Кол-во часов	Контроль
	Раздел 1. Задачи на части и проценты	**4**	
1	Решение задач на проценты	1	
2	Задачи на проценты и части	1	
3	Задачи на составление уравнений	1	

4	Контрольный урок		1
	Раздел 2. Графы	**8**	
5	Основные понятия теории графов	1	
6	Степень вершины. Полный граф и его свойства	1	
7	Путь, маршрут и цикл в графе	1	
8	Контрольная работа за 1 четверть		1
9	Связные вершины	1	
10	Компоненты связности графа	1	
11	Дерево. Мост и число ребер в дереве	1	
12	Контрольный урок		1
	Раздел 3. Инвариант	**7**	
13	Понятие об инварианте	1	
14	Решение простейших задач на инвариант с помощью чётности	1	
15	Контрольная работа за 2 четверть		1
16	Инвариант и раскраски. Инвариант и остатки	1	
17	Понятие о полуинварианте	1	
18	Процессы и операции	1	
19	Контрольный урок		1
	Раздел 4. Конструктивные задачи	**6**	
20	Примеры и конструкции	1	
21	Задачи на построение примера	1	
22	Построение контрпримера	1	
23	«Оценка + пример»	1	
24	Оценки и примеры конструкций на шахматной доске	1	
25	Контрольная работа за 3 четверть		1
	Раздел 5. Игры	**8**	
26	Игры-шутки	1	
27	Симметрия	1	
28	Разбиение на пары, группы, фигуры	1	
29	Дополнение до особой позиции	1	
30	Первый ход	1	
31	Передача хода	1	
32	Геометрические игры	1	
33	Итоговая контрольная работа		1
34	Итоговое занятие	1	
	Итого часов:	**27**	**7**

Планируемые результаты освоения учащимися учебного предмета

Личностные результаты освоения программы по математике характеризуются в части:

1) патриотического воспитания:

проявлением интереса к прошлому и настоящему российской математики, ценностным отношением к достижениям российских математиков и российской математической школы, к использованию этих достижений в других науках и прикладных сферах;

2) гражданского и духовно-нравственного воспитания:

готовностью к выполнению обязанностей гражданина и реализации его прав, представлением о математических основах функционирования различных структур, явлений, процедур гражданского общества (например, выборы, опросы), готовностью к обсуждению этических проблем, связанных с практическим применением достижений науки, осознанием важности морально-этических принципов в деятельности учёного;

3) трудового воспитания:

установкой на активное участие в решении практических задач математической направленности, осознанием важности математического образования на протяжении всей жизни для успешной профессиональной деятельности и развитием необходимых умений, осознанным выбором и построением индивидуальной траектории образования и жизненных планов с учётом личных интересов и общественных потребностей;

4) эстетического воспитания:

способностью к эмоциональному и эстетическому восприятию математических объектов, задач, решений, рассуждений, умению видеть математические закономерности в искусстве;

5) ценностей научного познания:

ориентацией в деятельности на современную систему научных представлений об основных закономерностях развития человека, природы и общества, пониманием математической науки как сферы человеческой деятельности, этапов её развития и значимости для развития цивилизации, овладением языком математики и математической культурой как средством познания мира, овладением навыками исследовательской деятельности;

6) физического воспитания, формирования культуры здоровья и эмоционального благополучия:

готовностью применять математические знания в интересах своего здоровья, ведения здорового образа жизни (здоровое питание, сбалансированный режим занятий и отдыха, регулярная физическая активность), сформированностью навыка рефлексии, признанием своего права на ошибку и такого же права другого человека;

7) экологического воспитания:

ориентацией на применение математических знаний для решения задач в области сохранности окружающей среды, планирования поступков и оценки их возможных последствий для окружающей среды, осознанием глобального характера экологических проблем и путей их решения;

8) адаптации к изменяющимся условиям социальной и природной среды:

готовностью к действиям в условиях неопределённости, повышению уровня своей компетентности через практическую деятельность, в том числе умение учиться у других людей, приобретать в совместной деятельности новые знания, навыки и компетенции из опыта других;

необходимостью в формировании новых знаний, формулировать идеи, понятия, гипотезы об объектах и явлениях, в том числе ранее неизвестных, осознавать дефициты собственных знаний и компетентностей, планировать своё развитие;

способностью осознавать стрессовую ситуацию, воспринимать стрессовую ситуацию как вызов, требующий контрмер, корректировать принимаемые решения и действия, формулировать и оценивать риски и последствия, формировать опыт.

5 класс

Личностные результаты:

1) ответственное отношение к учению, готовность и способность учащихся к саморазвитию и самообразованию на основе мотивации к обучению и познанию;

2) способность к эмоциональному восприятию математических объектов, задач, решений, рассуждений;

3) умение ясно, точно, грамотно излагать свои мысли в устной и письменной речи, понимать смысл поставленной задачи, выстраивать аргументацию, приводить примеры и контрпримеры;

4) первоначальное представление о математической науке как сфере человеческой деятельности, об этапах её развития, о её значимости для развития цивилизации;

5) критичность мышления, умение распознавать логически некорректные высказывания, отличать гипотезу от факта;

6) креативность мышления, инициатива, находчивость, активность при решении различных комбинаторных и логических задач;

Метапредметные результаты:

1) способность самостоятельно планировать альтернативные пути достижения целей, осознанно выбирать наиболее эффективные способы решения учебных и познавательных задач;

2) способность определять последовательность промежуточных целей и соответствующих им действий с учетом конечного результата;

3) умение осуществлять контроль по образцу и вносить необходимые коррективы;

4) способность адекватно оценивать правильность или ошибочность выполнения учебной задачи, её объективную трудность и собственные возможности её решения;

5) умение устанавливать причинно-следственные связи; строить логические рассуждения, умозаключения (индуктивные, дедуктивные и по аналогии) и выводы;

6) умение создавать, применять и преобразовывать знаково-символические средства, модели и схемы для решения учебных и познавательных задач;

7) развитие способности организовывать учебное сотрудничество и совместную деятельность с учителем и сверстниками: определять цели, распределять функции и роли участников, взаимодействовать и находить общие способы работы; умения работать в группе: находить общее решение и разрешать конфликты на основе согласования позиций и учёта интересов; слушать партнёра; формулировать, аргументировать и отстаивать своё мнение;

8) способность прогнозировать возникновение конфликтов при наличии различных точек зрения;

9) формирования учебной и общепользовательской компетентности в области использования информационно-коммуникационных технологий (ИКТ - компетентности);

10) первоначальное представление об идеях и о методах математики как об универсальном языке науки и техники;

11) развитие способности видеть математическую задачу в других дисциплинах, в окружающей жизни;

12) умение находить в различных источниках информацию, необходимую для решения математических проблем, и представлять её в понятной форме; принимать решение в условиях неполной и избыточной, точной и вероятностной информации;

13) умение понимать и использовать математические средства наглядности (рисунки, чертежи, схемы и др.) для иллюстрации, интерпретации, аргументации;

14) умение выдвигать гипотезы при решении учебных задач и понимания необходимости их проверки;

15) умение самостоятельно ставить цели, выбирать и создавать алгоритмы для решения учебных математических проблем;

16) способность планировать и осуществлять деятельность, направленную на решение задач исследовательского характера;

Предметные результаты:

Учащийся научится:

- работать с математическим текстом (структурирование, извлечение необходимой информации), точно и грамотно выражать свои мысли в устной и письменной речи, применяя математическую терминологию и символику, использовать различные языки математики (словесный, символический,

графический), развития способности обосновывать суждения, проводить классификацию;
- делать обоснованные выводы;
- решать простейшие задачи на четность и чередование;
- применять принцип Дирихле при решении олимпиадных задач;
- решать задачи на построение примера и контрпримера;
- решать задачи на переливания и взвешивания;
- использовать основные свойства делимости;
- применять идею раскраски при решении олимпиадных задач;
- применять основную теорему арифметики;

Учащийся сможет научиться:
- выполнять арифметические преобразования рациональных выражений, применять их для решения математических задач и задач, возникающих в смежных учебных предметах;
- понимать, что часто существует много правильных решений одной и той же задачи;
- применять полученные знания в нестандартных ситуациях, при решении олимпиадных задач и задач повышенной сложности;
- использовать основные логические приемы при проведении рассуждений в различных предметных областях.

6 класс

Личностные результаты:

1) коммуникативная компетентность в общении и сотрудничестве со сверстниками, старшими и младшими в образовательной, учебно-исследовательской, творческой и других видах деятельности;
2) умение контролировать процесс и результат учебной математической деятельности;
3) умение ясно, точно, грамотно излагать свои мысли в устной и письменной речи, понимать смысл поставленной задачи, выстраивать аргументацию, приводить примеры и контрпримеры;
4) критичность мышления, умение распознавать логически некорректные высказывания, отличать гипотезу от факта;
5) креативность мышления, инициативы, находчивости, активности при решении различных комбинаторных и логических задач;

Метапредметные результаты:

1) способность определять последовательность промежуточных целей и соответствующих им действий с учетом конечного результата;
2) умение устанавливать причинно-следственные связи; строить логические рассуждения, умозаключения (индуктивные, дедуктивные и по аналогии) и выводы;
3) умение создавать, применять и преобразовывать знаково-символические средства, модели и схемы для решения учебных и познавательных задач;
4) способность прогнозировать возникновение конфликтов при наличии различных точек зрения;
5) формирования учебной и общепользовательской компетентности в области использования информационно-коммуникационных технологий (ИКТ - компетентности);
8) первоначальное представление об идеях и о методах математики как об универсальном языке науки и техники;
9) умение понимать и использовать математические средства наглядности (рисунки, чертежи, схемы и др.) для иллюстрации, интерпретации, аргументации;
10) умение выдвигать гипотезы при решении учебных задач и понимания необходимости их проверки;
11) понимание сущности алгоритмических предписаний и умения действовать в соответствии с предложенным алгоритмом;

12) умение самостоятельно ставить цели, выбирать и создавать алгоритмы для решения учебных математических проблем;

13) способность планировать и осуществлять деятельность, направленную на решение задач исследовательского характера;

Предметные результаты:

Учащийся научится:

- работать с математическим текстом (структурирование, извлечение необходимой информации), точно и грамотно выражать свои мысли в устной и письменной речи, применяя математическую терминологию и символику, использовать различные языки математики (словесный, символический, графический), развития способности обосновывать суждения, проводить классификацию;
- решать задачи на проценты и части;
- строить и применять простейшие графы при решении олимпиадных задач;
- решать простейшие задачи на инвариант с помощью четности;
- находить инвариант в задачах на раскраски и остатки;
- различать инвариант и полуинвариант;
- использовать основные свойства делимости;
- строить пример с заданными условиями;
- применять метод доказательства от противного, метод оценки
- применять основную теорему арифметики;
-применять понятие симметрии в игровых задачах;
- находить и использовать стратегии при решении простых игровых задач

Учащийся сможет научиться:

- выполнять арифметические преобразования рациональных выражений, применять их для решения математических задач и задач, возникающих в смежных учебных предметах;
- понимать, что часто существует много правильных решений одной и той же задачи;
- применять полученные знания в нестандартных ситуациях, при решении олимпиадных задач и задач повышенной сложности;
- использовать основные логические приемы при проведении рассуждений в различных предметных областях.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Примерные задания олимпиадной работы для 5-го класса

1. В десятичной записи числа семьдесят три цифры и все они единицы. Делится ли это число на 18?
2. Десять подружек собрали 44 яблока. Докажите, что какие-то два из них собрали одинаковое число яблок.
3. Из доски 8×8 вырезали угловую клетку. Можно ли получившийся остаток разрезать на прямоугольники 3×1?
4. Среди 9 монет одна фальшивая. Найдите её за два взвешивания на чашечных весах без гирь, если известно, что она легче настоящей.

Примерные задания олимпиадной работы для 6-го класса

1. В Морляндии объявили конкурс: в куске сетки размером 5×20 ячеек нужно перерезать как можно больше верёвочек так, чтобы сетка не распалась на два куска. Победитель получит приз. Какое наибольшее число верёвочек можно перерезать?

2. 6 детей из 6-го класса стоят по кругу, и на каждом сидит комар. Время от времени какие-то два комара перелетают на соседнего ребёнка – один по часовой стрелке, а другой – против. Могут ли все комары собраться на одном несчастном?

3. На столе лежат 20 фантиков. Двое по очереди берут 1 или 2 фантика. Побеждает тот, кто возьмёт последний фантик. Кто победит при правильной игре – первый или второй игрок?

4. Среди 12 монет одна фальшивая (легче настоящей). За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь фальшивую монету можно наверняка отделить от настоящих?

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

Четные и нечетные числа.

Известно, что целые числа бывают *чётными* и *нечётными*. Чётные числа можно записать в виде $2k$, где k – целое число, а нечётные – в виде $2k+1$.

Легко доказать (показать на примерах) следующие ***свойства чётности*** для целых чисел:

1. Сумма чётных чисел четна.
2. Сумма 2-х нечётных чисел четна.
3. Сумма чётного и нечётного чисел нечётна.
4. Произведение любого числа на чётное число – четно.
5. Если произведение нескольких чисел нечётно, то все сомножители нечётны.
6. Сумма чётного количества нечётных чисел четна.
7. Сумма нечётного количества нечётных чисел нечётна.
8. Разность и сумма двух данных чисел – числа одной чётности.
9. Если объекты можно разбить на пары, то их количество четно.

Методическое замечание. Рекомендуется одно из этих свойств доказать учителю, одно – всем вместе на доске и одно – самостоятельно.

Пример 1. *Могут ли десять игрушек ценой в 3, 5 или 7 рублей стоить в сумме 53 рубля?*

Решение. Сумма чётного количества нечётных чисел всегда четна. У нас есть 10 игрушек, а цена каждой игрушки – нечётное число, значит, их сумма должна быть четна. Но 53 – нечётное число, поэтому получить его в виде суммы 10 нечётных чисел нельзя.

Пример 2. *Можно ли 7 телефонов соединить между собой попарно так, чтобы каждый был соединён ровно с тремя другими?*

Решение. Используем следующее соображение: если мы рассматриваем объекты типа верёвки – провода, дороги, рукопожатия, знакомства и т. д., то при любом количестве объектов число концов должно быть чётным. Предположим, что мы соединили 7 телефонов между собой попарно так, чтобы каждый был соединён ровно с тремя другими. Посчитаем количество концов проводов, соединяющих эти телефоны. Понятно, что их число должно быть чётным. От каждого из 7 телефонов отходит 3 конца, всего $7 \cdot 3 = 21$ конец, нечётное число, значит, нельзя 7 телефонов соединить между собой попарно так, чтобы каждый был соединен ровно с тремя другими.

Пример 3. *13 команд играют однокруговой турнир. Докажите, что в любой момент есть команда, сыгравшая чётное число матчей. (Однокруговой турнир – когда каждая команда играет с каждой ровно один раз.)*

Указание. В общей сумме всех игр каждая игра учитывается два раза, если же подсчитать сумму игр 13 команд, сыгравших по нечётному числу матчей, результат будет нечётным. Чтобы общая сумма игр получилась чётной, хотя бы одна команда должна сыграть чётное число матчей.

Домашнее задание.

1. Гриша посчитал сумму $1 + 3 + 5 + ... + 997 + 999$ и получил результат 247013. Какая чётность данной суммы? Верный ли ответ получил Гриша? Попробуйте выполнить сложение устно.
2. Вычислите: $99 – 97 + 95 – 93 + ... + 7 – 5 + 3 – 1$.

3. Запишите число 31, пользуясь знаками действий и 1) шестью тройками; 2) пятью пятёрками; 3) пятью тройками.
4. Может ли сумма $1\cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot M + 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot K$, где M и K – натуральные числа, большие трёх, оканчиваться на 9?
5. Сколько существует трёхзначных чисел, в записи которых:
а) содержатся только цифры 5, 8, 9?
б) цифры 5, 8, 9 встречаются по одному разу?
6. У Маши было 5 плиток шоколада. Может ли Маша, поделив каждую плитку на 9, 15 или 25 кусочков, получить всего 100 кусков шоколада?

Знакомство с принципом Дирихле.

Методическое замечание. Используемые рассуждения достаточно стандартны и основываются на применении свойств неравенств и методе доказательства «от противного». Рекомендуется при решении простых задач этого типа проводить рассуждения, не упоминая о принципе Дирихле, так как в школьной программе нет такой темы и при решении задач ссылки на этот принцип неоправданны.

ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ: *Если в n клеток посадить n+1 зайцев, то найдётся хотя бы одна клетка, в которой находятся не менее чем 2 зайца*.

ОБОБЩЁННЫЙ ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ: *Если в n клеток посадить kn + 1 зайцев, то найдётся хотя бы одна клетка, в которой находятся не менее чем n +1 заяц*.

Докажем обобщённый принцип Дирихле.

Доказательство от противного. Предположим, что не найдётся такой клетки. Значит, в каждой клетке находится не более чем k зайцев. Тогда всего в n клетках не будет более чем kn зайцев. Но, по условию, было $kn + 1$ зайцев. Получилось противоречие, значит, наше предположение неверно. Следовательно, найдётся хотя бы одна клетка, в которой находятся не менее чем $k + 1$ заяц.

Методическое замечание. Безусловно, начинать эту тему стоит с задач, в которых нужно работать с конкретными числами. Обязательно в процессе решения нужно обращать внимание на то, что мы должны говорить «не более», «не менее», а не обсуждать «лучший» («худший») случай, так как доказать это часто бывает достаточно *сложно*.

Пример 1. *В городе 15 школ. В них обучается 6015 школьников. В концертном зале городского Дворца культуры 400 мест. Докажите, что найдётся школа, ученики которой не поместятся в этом зале.*

Решение. *Предположим, что в каждой школе не более 400 учеников. Значит, в 15 школах не более 15· 400 = 6000 школьников. Но, по условию, в школах обучается 6015 человек. Значит, найдётся школа, в которой больше 400 учеников. Поэтому ученики этой школы не поместятся в зале на 400 мест.*

Пример 2. *В школьном совете 17 парламентёров. За время заседаний часть и из них поссорились между собой. Докажите, что найдутся два участника совета, которые поссорились с одинаковым количеством парламентёров.*

Решение. Предположим, что все парламентёры поссорились с различным количеством своих коллег. Посчитаем, сколько может быть различных вариантов. Можно не поссориться ни с кем, поссориться с одним человеком, с двумя, с тремя и так далее до 16 (если поссорился со всеми). Всего получается 17 вариантов поссориться, но если кто-то поссорился со всеми, то не может одновременно быть парламентёра, который ни с кем не поссорился. Значит, остаётся 16 различных вариантов для 17 человек, и найдутся два участника совета, которые поссорились с одинаковым количеством парламентёров.

Пример 3. *В школе 5 восьмых классов: 8«А», ... , 8«Д». В каждом из них учится по 32 человека. Докажите, что найдутся 14 восьмиклассников, родившихся в один месяц.*

Решение. Предположим, что в каждом месяце родилось не более 13 учеников (год рождения не учитывается). Значит, за 12 месяцев родилось не более $12\cdot 13 = 156$ школьников. Но, по условию, в пяти классах этой школы обучается $5 \cdot 32 = 160$ человек. Получили противоречие. Значит, найдётся месяц, в котором родилось больше чем 13 учеников, то есть хотя бы 14.

Пример 4. *В 3«А» классе учится 27 школьников, знающих (всего) 109 стихотворений. Докажите, что найдётся школьник, знающий не менее пяти стихотворений.*

Решение. Предположим, что каждый школьник знает не более четырёх стихотворений. Значит, 27 школьников знают не более $4 \cdot 27 = 108$ стихотворений. Но, по условию, они знают 109 стихотворений. Получили противоречие. Следовательно, найдётся школьник, который знает хотя бы 5 стихотворений.

Пример 5. *В походе участвовало 25 человек, каждому из которых было от 24 до 30 полных лет (на данный день). Докажите, что найдутся четыре человека, родившихся в один год.*

Решение. Различных годов рождения может быть 7. Предположим, что каждый год родилось не более трёх участников похода. Значит, за 7 лет могли родиться не более $3 \cdot 7 = 21$ участника. Но, по условию, в походе участвовало 25 человек. Получили противоречие. Значит, найдутся четыре участника похода, родившихся в один год.

Практическое задание.

1. Начертите прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см. Измерьте гипотенузу. Ее длина должна получиться 5 см. Проверьте, что выполняется равенство $3^2 + 4^2 = 5^2$.
2. Начертите треугольник с катетами 5 см и 12 см. Измерьте гипотенузу. Ее длина должна быть равна 13 см. Проверьте, что выполняется равенство
   $5^2 + 12^2 = 13^2$. У треугольника с катетами 6 см и 8 см гипотенуза равна 10 см (проверьте!). При этом $6^2 + 8^2 = 10^2$.

Оказывается, что в любом прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы. Это утверждение называется *теоремой Пифагора.*

Домашнее задание.

1. По дороге в школу третьеклассник Коля преодолел 27 луж. Дорога в школу заняла у него 15 минут. Докажите, что найдутся две лужи с паузой менее чем в 35 секунд.
2. В Волгодонске живёт более 125000 человек. На голове у каждого не более 10000 волос. Докажите, что найдутся 12 человек с одинаковым количеством волос на голове.
3. В буфете продают лимонад в бутылках стоимостью 30 руб. Пустую бутылку можно вернуть, получив за неё 20 руб. Какое наибольшее количество лимонада можно выпить на 100 руб.?
4. Я задумал число, прибавил к нему 1, умножил сумму на 2, произведение разделил на 3 и от результата отнял 4. Получилось 5. Какое число я задумал?
5. Первый член последовательности равен 439, каждый следующий равен сумме цифр предыдущего, умноженной на 13. Чему равен девяносто девятый член последовательности?

Делимость.

Методическое замечание. На первом занятии по теме «Делимость» следует сформулировать и на примерах пояснить основную теорему арифметики, а также вспомнить признаки делимости на 2, 5, 10, 4, 25, 3, 9, 11.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АРИФМЕТИКИ: *Натуральное число раскладывается на произведение простых множителей единственным образом, с точностью до порядка множителей.*

Пример 1. *Докажите, что произведение любых трёх последовательных чисел делится на 6.*

Решение. Среди трёх последовательных чисел есть как минимум одно чётное и одно, делящееся на 3. Значит, их произведение разделится на 6.

Пример 2. *Каково наименьшее натуральное N такое, что N! делится на 770?*

Решение. $770 = 7 \cdot 11 \cdot 10$, значит, $N!$ делится на 11. Наименьшее выражение, содержащее множитель 11, будет 11!, в это произведение будут входить и 7, и 10.

Пример 3. *Может ли N! оканчиваться на 5 нулей?*

Решение. Произведения с 20! по 24! оканчиваются на 4 нуля, т.к. в произведении содержится 4 множителя 5: в числах 5, 10, 15, 20. А 25! содержит сразу 2 множителя 5 в составе числа $25 = 5^2$. Значит, 25! оканчивается на 6 нулей.

Ответ. На 5 нулей $N!$ оканчиваться не может.

Домашнее задание.

1. Можно ли разрезать квадрат 10×10 на прямоугольники 1×4?
2. Запись шестизначного числа в десятичной системе исчисления такова, что одинаковы первая и четвёртая цифры, вторая и пятая, третья и шестая. Делится ли это число: а) на 7; б) на 11; в) на 13?
3. Что больше: 100^{100} или $50^{50} \cdot 150^{50}$?
4. В компании 16 человек. Каждому нравится 8 человек из этой компании. Докажите, что найдутся двое, которые нравятся друг другу.
5. В трёхзначном числе последняя цифра 3. Если её переставить в начало числа, то получившееся число будет на 1 больше, чем утроенное первоначальное. Найдите первоначальное число.

Задачи на построение примера.

Многие олимпиадные задачи начинаются со слов: «Можно ли...». При этом существует две возможности:

– ответ в задаче – нельзя, и тогда нужно доказать, *почему* нельзя;

– ответ – можно, и тогда нужно построить *пример* и показать, что он удовлетворяет условию задачи.

Точно так же часто ответом на вопрос: «Всегда ли...» или «Всякий ли... » является конкретный пример, когда это условие не выполняется.

Типичный пример таких задач – задачи на переливания. Они традиционно вызывают интерес у младших школьников и трудности с записью решения. Поэтому учителю нужно обратить особое внимание на рациональную запись решения (в виде схемы или таблицы).

Пример 1. *Можно ли, имея лишь два сосуда 3 и 5 л, набрать из водопроводного крана 4 л воды?*

Решение. Пусть «н» обозначает «налить из водопровода сосуд доверху», «п» – «перелить из сосуда 3 л в сосуд 5 л», «в» – «вылить всё из сосуда».

Сосуд 3	0	н	3	п	0	н	3	п	1		1	п	0	н	3	п	0
Сосуд 5	0		0		3		3		5	в	0		1		1		4

В результате в сосуде вместимостью 5 л оказалось 4 л воды.

Методическое замечание. Можно и не писать действия, достаточно следить за объёмом воды в каждом сосуде. Можно, наоборот, описывать процесс переливания не в таблице, а словами.

Пример 2. *Любой ли прямоугольник можно разрезать на 199 частей так, чтобы из них можно было составить квадрат?*

Решение. Рассмотрим прямоугольник 1×4000000. Допустим, что мы разрезали его на 199 частей и смогли сложить из них квадрат. Разделим его на прямоугольников 1×10000. Так как количество частей 199, то найдётся часть, попавшая хотя бы в 3 различных прямоугольника. Из них можно брать 2 несоседних. Значит, некоторые точки этой части находятся на расстоянии, не меньшем 10000. Площадь квадрата равна площади прямоугольника, а сторона равна 2000. Итак, выбранная нами часть в квадрат поместиться не могла. Получилось противоречие, следовательно, прямоугольник и размером 1×4000000 нельзя разрезать на 199 частей так, чтобы получился квадрат.

Ответ. Не любой.

Пример 3. *Можно ли в таблице 3х3, следуя шахматным правилам, конём*

а) попасть из угловой клетки в диагонально противоположную;

б) обойти все клетки доски?

Решение.

а) Да, например:

1		3
4		
	2	5

б) Нет, конь никогда не попадёт в центральную клетку, достаточно нарисовать его маршрут, начиная с любой клетки, кроме центральной. С неё он вообще не может сделать ход, значит, не сможет и попасть на центральную ни с какой другой клетки.

Методическое замечание. Рекомендуется разобрать задачи домашнего задания.

Домашнее задание.

1. Как, имея 2 сосуда ёмкостью 5 и 9 л, набрать из водоёма ровно 3 л воды?
2. Решите уравнение в натуральных числах: $x^2 - y^2 = 303$.
3. Числа P и $2P + 1$ – простые и $P > 3$. Докажите, что число $4P + 1$ составное.
4. Можно ли числа от 1 до 32 разбить на несколько групп так, чтобы произведения внутри каждой группы были равны?

Решение задач на проценты.

Задачи «на проценты», пожалуй, единственный «подарок» математикам от бухгалтеров. Поэтому для успешного решения таких задач нужно помнить некоторые простые ***правила***:

1) Чтобы найти часть от числа, нужно эту часть (дробь) умножить на число.

2) Вся величина, от которой берутся проценты, составляет 100%.

3) Чтобы избавиться от процентов, нужно перевести их в части, разделив на 100. Например, 20% = 0,2; 75% = 0,75; 150% = 1,5 и т.д.

4) Чтобы узнать, на сколько процентов изменилась какая-то величина, нужно из конечного значения вычесть начальное и результат разделить на начальное значение. То, что получится, нужно умножить на 100%.

5) Чтобы узнать процентное содержание вещества в растворе, нужно массу вещества разделить на массу раствора и результат умножить на 100%.

Пример 1. *Товар подорожал на 30%, а затем подешевел на 30%. Как изменилась цена этого товара?*

Решение. Товар подорожал на 30%, то есть стал стоить 130%, что составляет 130:100 = 1,3 от первоначальной цены. Затем он подешевел на 30%, то есть стал стоить 100% – 30% = 70%, что составляет 70:100 = 0,7 от новой цены. Пусть первоначальная цена была x. После подорожания товар стал стоить $1{,}3x$, а после удешевления $0{,}7 \cdot 1{,}3x = 0{,}91x$. Найдём разницу между начальной и конечной ценой $x - 0{,}91x = 0{,}09x$, что составляет $0{,}09 \cdot 100\% = 9\%$ от начальной цены.

Ответ. Товар подешевел на 9%.

Пример 2. *На первом заседании парламента присутствовало 40% от списочного состава депутатов, на втором заседании – 55%. Сколько процентов депутатов присутствовало на обоих заседаниях?*

Решение. В этой задаче нельзя дать определённый ответ. Если все присутствующие на первом заседании были и на втором, то на двух заседаниях было 40% депутатов. Если же никто из посетивших первое заседание не пришёл на второе, то на двух заседаниях было 0% депутатов. Понятно, что пересечением этих групп может быть любое целое число депутатов в промежутке от 0% до 40%.

Пример 3. *Сколько нужно взять сливок жирностью 36% и жирностью 18%, чтобы получить 90 кг сливок с содержанием 30% жира?*

Решение. Пусть нужно взять x кг сливок жирностью 36%, жира в них содержится $0{,}36x$ кг. Сливок жирностью 18% нужно взять y кг, в них содержится $0{,}18y$ кг жира. Всего сливок $x + y = 90$ кг, жира в них будет $0{,}36x + 0{,}18y = 0{,}3 \cdot 90$ кг. Решая полученную систему из двух уравнений, найдём $x = 60$ кг, $y = 30$ кг.

Ответ. Нужно взять 60 кг сливок жирностью 36% и 30 кг сливок жирностью 18%.

После того, как учитель разобрал эти три задачи, можно следующие две задачи дать решить самостоятельно.

Пример 4. *Товар подорожал на 10%, а затем ещё на 20%. Как изменилась цена этого товара?*

Решение. Новая цена равна $1{,}1 \cdot 1{,}2 = 1{,}32$ от старой цены. Увеличение цены
составит $(1{,}32 – 1) – 100\% = 32\%$.

Ответ. Увеличилась на 32%.

Пример 5. *В растворе содержится 15 г сахара, 20 г соли и 165 г воды. Определите, каково процентное содержание соли и сахара в растворе.*

Решение. Процентное содержание соли в растворе: $20/(15 + 20 +165) \cdot 100\% = 10\%$,
сахара: $15/(15 + 20 +165) \cdot 100\% = 7{,}5\%$.

***Ответ**:* 10% и 7,5%.

Домашнее задание.

1. Какой цифрой оканчивается число: а) 66^{66}; б)33^{33}; в)7^{7}?
2. В бутылку с 20 г 72%-ой уксусной эссенции добавили 140 г воды, каково процентное содержание уксусной кислоты в получившемся растворе?
3. Магазин продал одному покупателю 25% полотна, второму – 30% остатка, а третьему – 40% нового остатка. Сколько процентов полотна сталось?
4. В одном городе Канады 70% жителей знают французский и 80% – английский язык. Сколько процентов жителей знают оба языка?
5. Кузнечик прыгает вдоль прямой на 2 м вправо или влево. Доказать, что он:
   а) может вернуться в исходную точку только после чётного числа ходов;
   б) никогда не попадёт в точку, находящуюся на расстоянии в 1 м от начальной.